Fonctions affines

1 Caractérisation des fonctions affines

A Définitions et propriété

Définitions

- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.
- Les nombres m et p sont respectivement appelés le **coefficient directeur** et l'**ordonnée à l'origine** de f.

LOGIQUE

Pour une fonction affine donnée, il y a unicité des réels m et p.

Cas particuliers

Si f est une fonction affine telle que :

- $m = 0$, alors la fonction f est une fonction **constante**.
- $p = 0$, alors la fonction f est une fonction **linéaire**.

LOGIQUE

Cette propriété **caractérise** les fonctions affines.

Propriété

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous réels distincts a et b, le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.

NOTATION

Le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le **taux d'accroissement** de f entre a et b.

DÉMONSTRATION

- Implication : on suppose que f est une fonction affine.
$f(b) = mb + p$ et $f(a) = ma + p$ donc, si $a \neq b$,
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(mb+p)-(ma+p)}{b-a} = \frac{mb+p-ma-p}{b-a} = \frac{mb-ma}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m.$$
Le taux d'accroissement est bien constant.

- Réciproque : Soit a un réel.
On suppose que, pour tout $x \neq a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est constant.
Pour tout $x \neq a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = c \Leftrightarrow f(x) - f(a) = c(x-a) \Leftrightarrow f(x) = cx - ca + f(a)$.
Si $x = a$, alors on a $f(a) = ca - ca + f(a)$: l'égalité est donc encore vraie.
Donc f est une fonction affine avec $m = c$ et $p = -ca + f(a)$.

LOGIQUE

Pour démontrer une équivalence ($A \Leftrightarrow B$: proposition sous la forme « si et seulement si »), il suffit de démontrer l'implication ($A \Rightarrow B$) et la réciproque ($B \Rightarrow A$).

Conséquence

Soient f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ et a et b deux réels distincts.
Alors, $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $p = f(a) - ma$.

EXEMPLE

f est une fonction affine telle que $f(0)=-5$ et $f(1)=-2$. Alors : $p=f(0)=-5$ et $m=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{-2-(-5)}{1}=-2+5=3$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$.

Remarque : $p=f(0)$ et, si $a=0$ et $b=1$ alors $m=f(1)-f(0)$.

B Représentation graphique

Propriété (admise)

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,,\mathrm{J})$, la courbe représentative d'une fonction f est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées si, et seulement si, f est une fonction affine.

Remarque : La courbe représentative d'une fonction f a pour équation $y=f(x)$.

Conséquence

Soit f une fonction affine définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$.
Pour représenter f, il suffit de placer deux points $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}\,;y_{\mathrm{B}})$ avec $y_{\mathrm{A}}=mx_{\mathrm{A}}+p$ et $y_{\mathrm{B}}=mx_{\mathrm{B}}+p$ puis de tracer la droite passant par ces deux points.

Remarque : La différence des ordonnées de A et B est proportionnelle à la différence des abscisses de A et B.

2 Étude d'une fonction affine

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$ où m et p sont deux réels.

A Variation et parité

Propriété

Si $m>0$, alors f est une fonction strictement croissante.
Si $m<0$, alors f est une fonction strictement décroissante.

Remarque : Si $m=0$, alors f est constante.

DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels.

$m>0$: $a<b \Leftrightarrow ma<mb$
$\Leftrightarrow ma+p<mb+p \Leftrightarrow f(a)<f(b)$
donc f est strictement croissante.

$m<0$: $a<b \Leftrightarrow ma>mb$
$\Leftrightarrow ma+p>mb+p \Leftrightarrow f(a)>f(b)$
donc f est strictement décroissante.

LOGIQUE

On peut utiliser un **raisonnement par l'absurde** pour démontrer les réciproques.

Propriété

f est une fonction affine impaire si, et seulement si, f est une fonction linéaire.
f est une fonction affine paire si, et seulement si, f est une fonction constante.

B Signes

Propriété

1. Si $m \neq 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$.

2. Si $m > 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{p}{m}$.

3. Si $m < 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{p}{m}$.

$m > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$m < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Remarque : Si $m = 0$, f est du signe de p.

Conséquence

Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions affines, on étudiera le signe de chacune des fonctions dans un même tableau de signes et on conclura à l'aide de la propriété des signes d'un produit ou d'un quotient.

Remarque : Faire attention à l'ensemble de définition de la fonction pour un quotient.